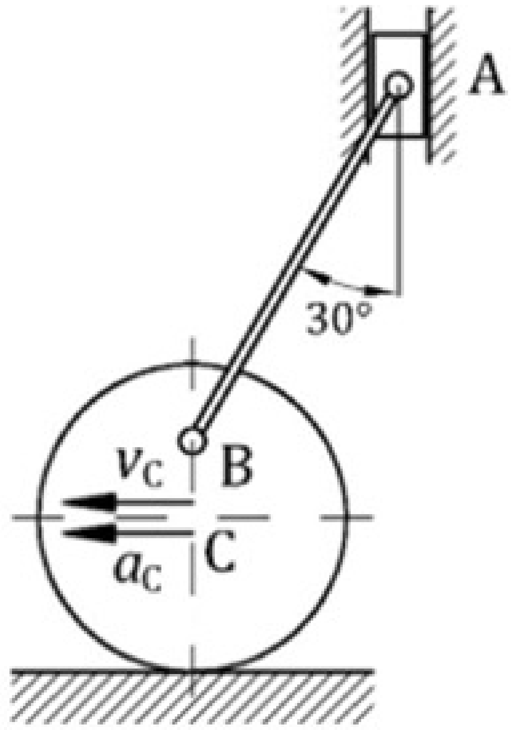
Примјер испитних задатака за ПРВИ колоквијум из МЕХАНИКЕ (В1)

1. Коначна једначина кретања тачке је $\vec{r} = 2\sin t^2\,\vec{\imath} - 2\cos t^2\,\vec{\jmath}$.

- Одредити путању тачке.
- Одредити интензитет брзине тачке у произвољном тренутку и тренутку $t_2 = 2$ s.
- Нацртати тангенцијално и нормално убрзање у тренутку $t_1 = \sqrt{\pi}$ s и одредити њихове интензитете у том тренутку.
- Одредити угаоно убрзање тачке.

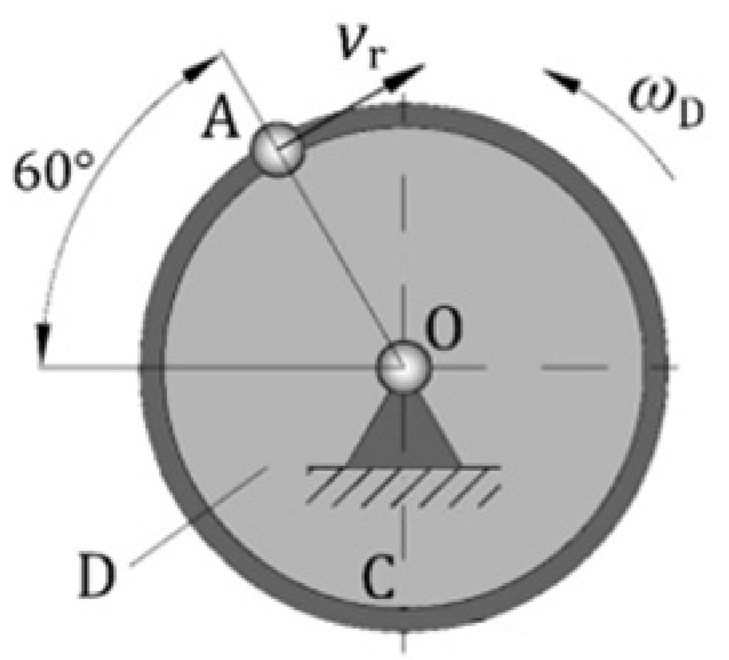
2. Диск полупречника R се по хоризонталној подлози котрља без клизања. У положају приказаном на слици брзина његовог центра износи $2\sqrt{3}$ m/s, а убрзање $7{,}43\ \mathrm{m/s^2}$. Зглоб B се у односу на центар диска налази на растојању $R/2$. Ако дужина полуге AB износи један метар, а полупречник R пола метра, у приказаном положају одредити:

- угаону брзину полуге AB;
- брзину клизача A и
- убрзање клизача A.



3. Диск D, полупречника један метар, обрће се око тачке O константном угаоном брзином $\omega_D = 5\ \mathrm{s^{-1}}$. Истовремено се по ободу диска креће куглица A тако да јој се интензитет брзине у односу на диск мијења према закону $v_r = 2t$. Након двије секунде од почетка кретања систем заузима положај приказан на слици.

- Одредити апсолутну брзину куглице у посматраном положају.
- Одредити интензитет апсолутног убрзања куглице у посматраном положају.



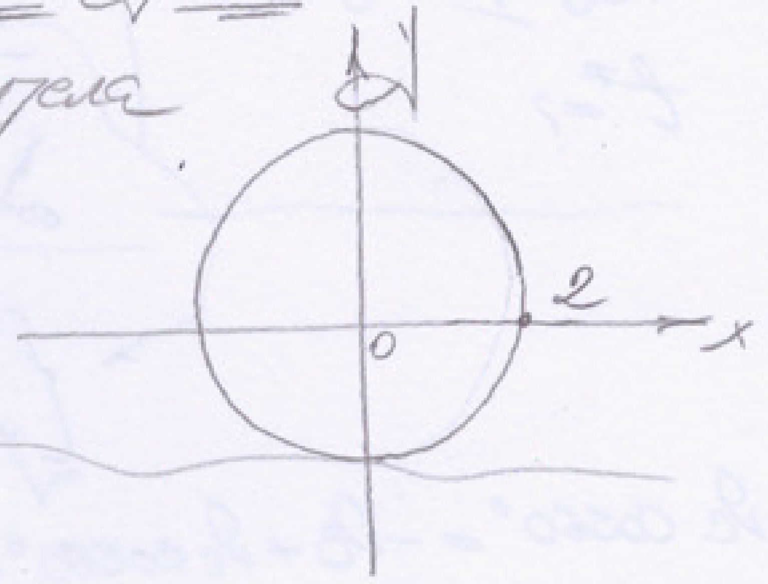
1. Коначна једначина кретања тачке је $\vec{r} = 2\sin t^2\,\vec{\imath} - 2\cos t^2\,\vec{\jmath}$.
   - Одредити путању тачке.
   - Одредити интензитет брзине тачке у произвољном тренутку и тренутку $t_2 = 2$ s.
   - Нацртати тангенцијално и нормално убрзање у тренутку $t_1 = \sqrt{\pi}$ s и одредити њихове интензитете у том тренутку.
   - Одредити угаоно убрзање тачке.

$$\vec{r} = 2\sin t^2\,\vec{i} - 2\cos t^2\,\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\sin t^2 \;/^2 \Rightarrow x^2 = 2^2\cdot\sin^2 t^2 \\ y = -2\cos t^2 \;/^2 \Rightarrow y^2 = 2^2\cos^2 t^2 \end{array}\right\} \oplus \Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2(\underbrace{\sin^2 t^2 + \cos^2 t^2}_{=1})$$

$$\underline{x^2 + y^2 = 2^2}$$

$$t \in [0, +\infty) = \begin{cases} x \in [-2, 2] \\ y \in [-2, 2] \end{cases} \Rightarrow \text{путања је цијела кружница}$$



$$\dot{x} = 2\cos(t^2)\cdot 2t = 4t\cos(t^2)$$

$$\dot{y} = +2\sin(t^2)2t = 4t\sin(t^2)$$

$$\underline{v} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{4^2 t^2[\underbrace{\cos^2(t^2) + \sin^2(t^2)}_{=1}]} = \underline{4t}$$

$$\underline{v_2} = 4\cdot t_2 = 4\cdot 2 = \underline{8\,m/s}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(4t) = 4 \Rightarrow \underline{a_{t1} = 4}$$

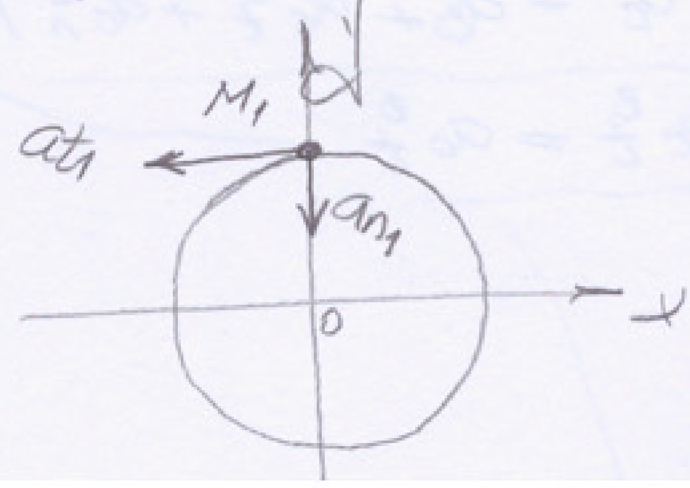
$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{16t^2}{2} = 8t^2 \Rightarrow \underline{a_{n1} = 8\pi}$$

$$x_1 = 2\sin(\sqrt{\pi})^2 = 0 \qquad M_1(0, 2)$$

$$y_1 = -2\cos(\sqrt{\pi})^2 = 2$$

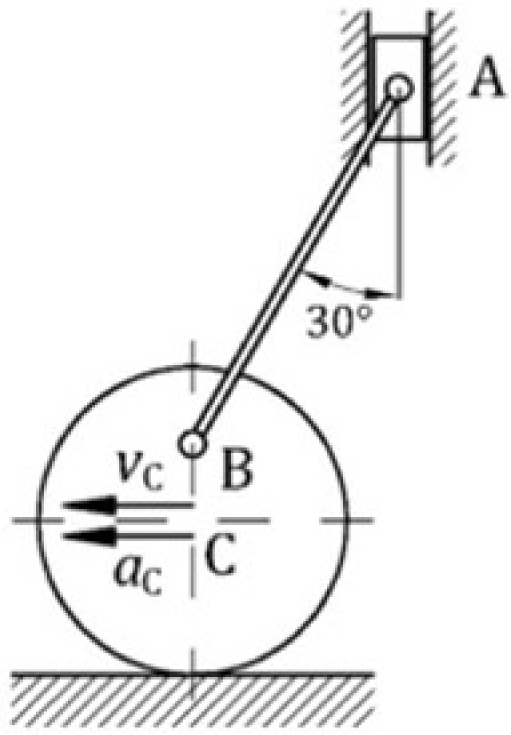
$$\dot{x}_1 = 4\sqrt{\pi}\cos(\sqrt{\pi})^2 = -4\sqrt{\pi} \leftarrow$$

$$\dot{y}_1 = 4\sqrt{\pi}\sin(\sqrt{\pi})^2 = 0$$



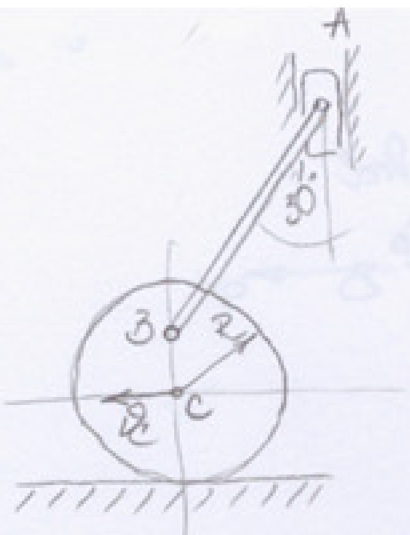
$$a_t = R\cdot\varepsilon \Rightarrow \underline{\varepsilon} = \frac{a_t}{R} = \frac{4}{2} = \underline{2\,s^{-2}} = const$$

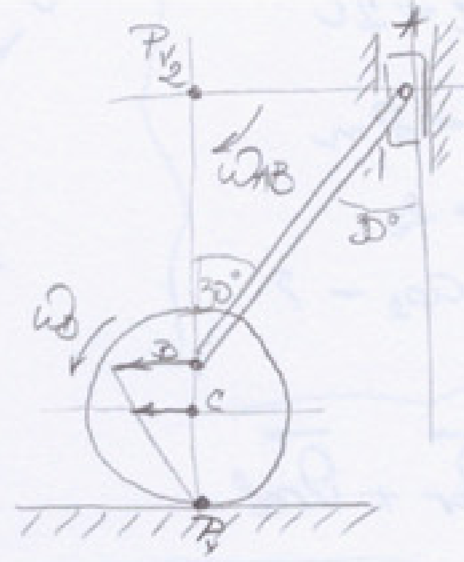
2. Диск полупречника R се по хоризонталној подлози котрља без клизања. У положају приказаном на слици брзина његовог центра износи $2\sqrt{3}$ m/s, а убрзање $7{,}43$ m/s^2. Зглоб B се у односу на центар диска налази на растојању $R/2$. Ако дужина полуге AB износи један метар, а полупречник R пола метра, у приказаном положају одредити:



- угаону брзину полуге AB;
- брзину клизача A и
- убрзање клизача A.

$\vartheta_C = 2\sqrt{3}$ m/s
$a_C = 7{,}43$ m/s^2
$\overline{BC} = R/2$
$\overline{AB} = 1$ m
$R = 0{,}5$ m
$\omega_{AB}, \vartheta_A, a_A = ?$





$\vartheta_C = R\cdot\omega_D \rightarrow \omega_D = \vartheta_C/R$

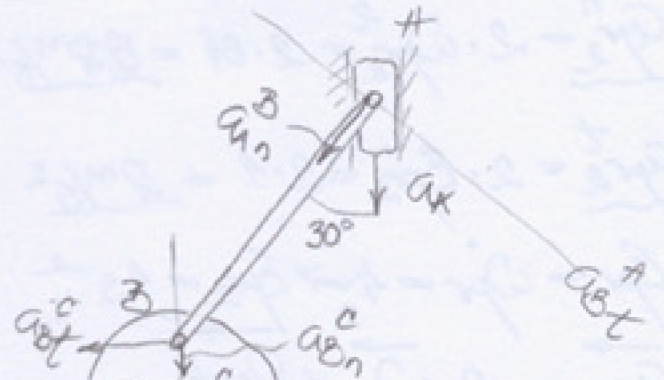
$\vartheta_B = \overline{BP_v}\cdot\omega_D = \left(R+\frac{R}{2}\right)\cdot\frac{\vartheta_C}{R} = \frac{3R}{2}\cdot\frac{\vartheta_C}{R} = \frac{3}{2}\vartheta_C = \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

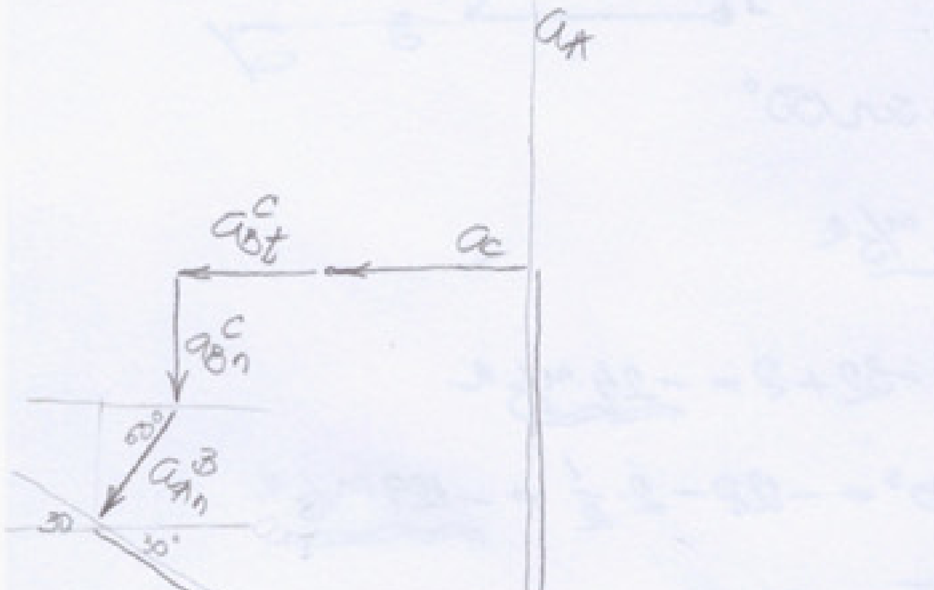
$\vartheta_B = \overline{BP_{v_2}}\cdot\omega_{AB} \Rightarrow \boxed{\omega_{AB}} = \frac{\vartheta_B}{\overline{BP_{v_2}}} = \frac{\vartheta_B}{\overline{AB}\cos 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{6\ s^{-1}}$

$\boxed{\vartheta_A} = \overline{AP_{v_2}}\cdot\omega_{AB} = \overline{AB}\sin 30^\circ\cdot\omega_{AB} = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 6 = \boxed{3\ m/s}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_A^{\,B}$

$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{a}_{Bt}^{\,C} + \vec{a}_{Bn}^{\,C} + \vec{a}_{At}^{\,B} + \vec{a}_{An}^{\,B}$





$a_{Bn}^C = \overline{BC}\cdot\omega_D^2 = \frac{R}{2}\cdot\left(\frac{\vartheta_C}{R}\right)^2 = \frac{0{,}5}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{0{,}5^2} = 12$ m/s^2

$a_{An}^B = \overline{AB}\cdot\omega_{AB}^2 = 1\cdot 36 = 36$ m/s^2

$a_{Bt}^C = \overline{BC}\cdot\boxed{\varepsilon_D} = \frac{R}{2}\cdot\frac{a_C}{R} = \frac{7{,}43}{2}$ m/s^2

$\vartheta_C = R\cdot\omega_D \ / \frac{d}{dt}$ (ово може јер знамо како се растојање тачке C од пола брзина мијења са временом, тј $CP_v = R = const$)

$a_C = R\cdot\varepsilon_D$

$\varepsilon_D = \frac{a_C}{R}$

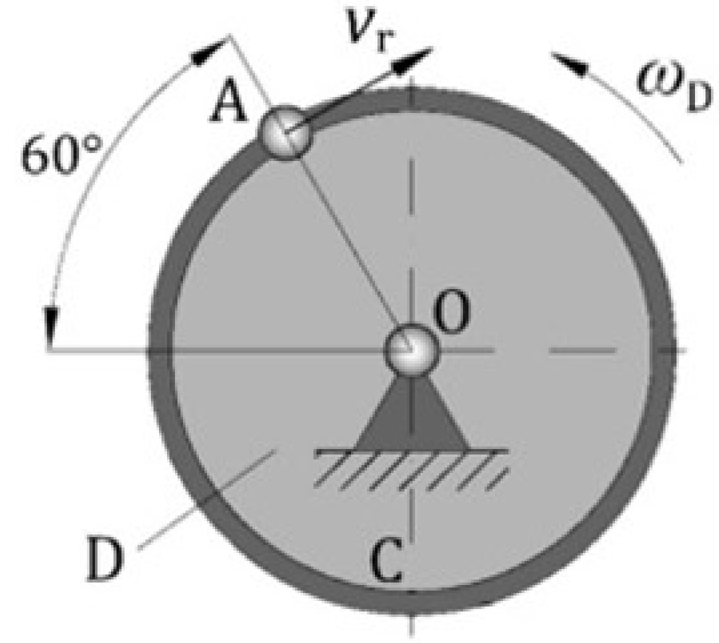
$a_{At}^B\cdot\cos 30^\circ = a_{An}^B\cos 60^\circ + a_{Bt}^C + a_C$

$a_{At}^B = \dfrac{36\cdot\frac{1}{2} + \frac{7{,}43}{2} + 7{,}43}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 33{,}65$ m/s^2

$a_A = a_{At}^B\sin 30^\circ + a_{An}^B\cdot\sin 60^\circ + a_{Bn}^C = 33{,}65\cdot\frac{1}{2} + 36\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 12 = 60$ m/s^2

3. Диск D, полупречника један метар, обрће се око тачке O константном угаоном брзином $\omega_D = 5\,\mathrm{s}^{-1}$. Истовремено се по ободу диска креће куглица A тако да јој се интензитет брзине у односу на диск мијења према закону $v_r = 2t$. Након двије секунде од почетка кретања систем заузима положај приказан на слици.

- Одредити апсолутну брзину куглице у посматраном положају.
- Одредити интензитет апсолутног убрзања куглице у посматраном положају.



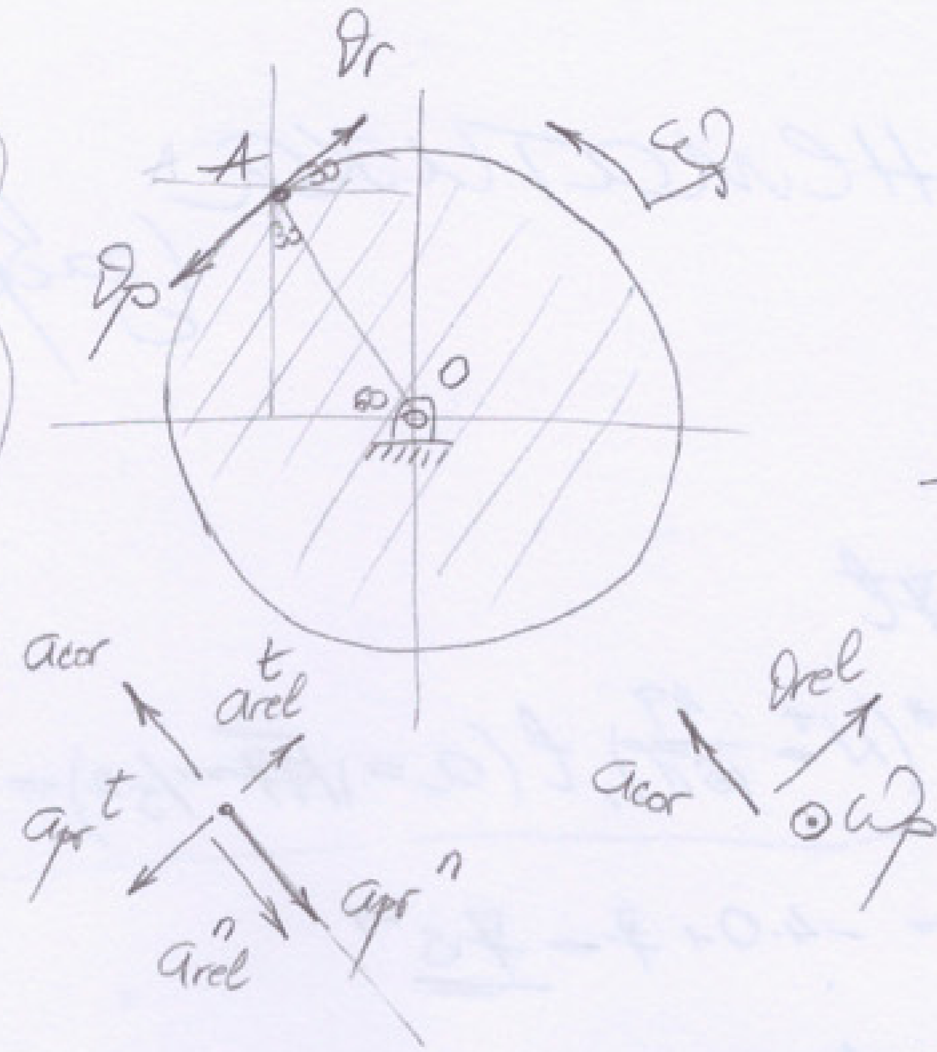
$R = 1\,m$

$\omega_p = 5\,s^{-1} = const$

$v_r = 2t$

$t_2 = 2\,s$

$v_{a_2}, a_{a_2}, \varepsilon_D, \vec{v}_B = ?$



$v_{r_2} = 2 \cdot 2 = 4$

$v_{p_2} = R \cdot \omega_{p_2} = 5$

$\underline{\underline{v_{a_2} = 1\,m/s}}$

$(v_{pr} \parallel v_{rel})$

$a_{pr}^t = R \cdot \varepsilon_p = 0 \quad (\omega_p = const)$

$a_{pr}^n = R \cdot \omega_p^2 = 1 \cdot 25 = 25$

$a_{rel}^t = \dot{v}_{rel} = 2$

$a_{rel}^n = \frac{v_{rel}^2}{R} = \frac{4t^2}{1} \Rightarrow a_{rel_2}^n = 16$

$a_{cor_2} = 2 \cdot \omega_{p_2} \cdot v_{rel_2} \cdot \sin 90° = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 40$

$a_{a_2} = \sqrt{(a_{pr_2}^n + a_{rel_2}^n - a_{cor_2})^2 + (a_{rel_2}^t - a_{pr_2}^t)^2}$

$= \sqrt{(25 + 16 - 40)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{5} = \underline{\underline{2{,}24}}$